

○×ゲーム無敗の方程式

数学班：廣岡 亮 福本 展顯

キーワード：○×ゲーム 関数

1. はじめに

ボールを投げた時の軌道は、放物線を描くことが知られている。このように、身近にある現象を数学的にとらえることで、科学が発展してきた。そこで、私たちも身近なゲームを数式で表してみようと考えた。3×3のマス目に、先手が○、後手が×を交互につけていき3個そろえば勝ちというシンプルな「○×ゲーム」(図1)。このゲームの最善の手順を発見し、それを単純な公式にしようと試みた。

2. 研究方法

まず、3×3マスの○×ゲームに必勝法が存在しないことを、すべての場合について調べた(回転や反転させて重なるものは同一視する)。その後、相手がどこに×または○をしようとも、絶対に負けないような最善の手順を発見し、公式にした。

○	○	○
×	○	
	×	×

1	2	3
4	5	6
7	8	9

3×3のマス目に1から9まで番号をふり(図2)、自分が先手の場合を考える。2手目に後手が×をする数字をx、3手目に先手が○をする数字をf(x)として、後手の2手目に対する先手の最善の3手目を導き出す関数を見つけようと試みた。5手目以降の動きについては、先手が○をする場所はほぼ明らかなので、今回の研究では、最も勝負を左右する3手目の公式化に挑んだ。

また、最善の手順が複数ある場合は、どの手順を踏むとより簡単な公式として表せるかを考慮しつつ研究を進めていった。

3. 結果

自分が先手とする。実際にゲームをして、いろいろなパターンを試した結果、1手目に先手が偶数に○をすると有利にゲームを進めることができないため、奇数に○をすることにする。

まず、1手目に先手が1に○をしたとき、後手にとっての最善の手と考えられる奇数の数字をxとしてとったとき、f(x)の値はそれぞれ次のようにとることができる。

$$f(3) = 4, 7, 9$$

$$f(5) = 9$$

$$f(7) = 2, 3, 9$$

$$f(9) = 3, 7$$

このように、それぞれのxに対応したf(x)が導き出せるような式をたてるために、

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ に x の値を代入し、それに対応する $f(x)$ を定め、連立方程式を解く。

$$f(3) = 4$$

$$f(5) = 9$$

$$f(7) = 2$$

$$f(9) = 3$$

という組合せで計算すると、

$$f(x) = \frac{1}{12}(5x^3 - 93x^2 + 529x - 837)$$

という式を導出することができた。このままでは式が複雑すぎるので、式の簡易化を図った。しかし、他の様々な数字の組合せで試してみたが、1手目に先手が1に○をしたとき、簡単な公式を発見することができなかった。

そこで、1手目に先手が「1に○をすること」と「9に○をすること」が回転させれば同じであることに着目すると、以下に示すように、 x の1次以下の式で表すことができた。

・ 1手目に先手が5に○をしたときの公式・・・

$$f(x) = 10 - x \quad (x: \text{奇数})$$
$$f(x) = 1 \quad (x: \text{偶数})$$

・ 1手目に先手が9に○をしたときの公式・・・

$$f(x) = |x - 4| \quad (x: \text{奇数})$$
$$f(x) = 5 \quad (x: \text{偶数})$$

4. 課題

今回の研究では、自分が先手の場合のみを考えましたが、自分が後手のときの公式を作ることが今後の課題である。ただ、自分が後手の場合を考えるときは、2手目を導いてくれる公式だけでは不十分で、4手目のことまで考えなくてはならず、その結果、公式が細分化され、関数が複雑になってしまう。今回は、 3×3 のマスに1から9まで番号をふるという方法で公式化を図ったが、もっと別の手法で単純な公式を作ることができる可能性があるので、検討していきたい。

5. 参考文献ならびに参考Webページ

特になし