

## 数独と触れ合う

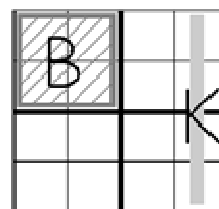
### 1. はじめに

4×4の数独の解が一つになる最初の条件を考えてみました。ルールは一般的な数独(ナンプレ)と同じで同ブロック内に同じ数字があったり、縦横一行に同じ数字が入ってはいけません。こういった条件で解が一つに定まるかを探しました。

### 2. 研究方法

まず最初にある数字が3つ以下ならばできないということをすべての場合について調べました。その後、数字が4つの場合について調べ、解が1つになる場合と複数出る場合があることを発見し、自分たちで用語をつくり、1つになる条件を導き出しました。

用語を2つ作り、1つめは二つの数字が一直線上に並ぶのを1Kとします。3つや4つ並んでいる場合はKとは表しません。2つめは2×2マスに、1つでも数字が入っていたらそれを1Bとします。なので最低で1B、最高でも4Bとなります。その二つを使い、xByKという風に表していきました。



以上を踏まえて、数独の解を一つの解に定める条件を導いていきました。

まず最初に問題として与えられた数字が図1のように一つするとき、これ以上確定する数字がないので解が一つになりません。同様に、与えられた数字が二つときも、解が一つに定まりません。三つの場合は途中までは埋められますが、多くの実験ですべてのパターンを調べた結果、解が定まりませんでした。

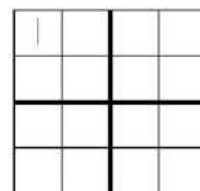


図1

以上の結果より、問題として与えられた数字が4つ以上でないといと解が一つにならないことがわかりました。まず、与えられた数字が4つで、その数字が1, 2, 3, 4のようにすべて異なる場合を調べました。

数字が縦、横、ななめの一直線上に並んでいる場合(例として図2)、確実にこれ以上進むことができないので不可とします。3つが一直線上に並ぶ場合(図3)、この場合は縦と横だけとします。この場合一つは埋められるが、それ以上進めないのが不可です。

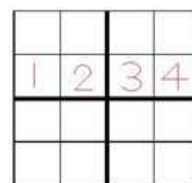


図2

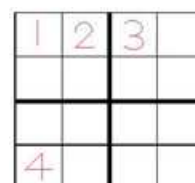


図3

4Kの場合(図4)。この場合も一つも埋めることができないので不可です。

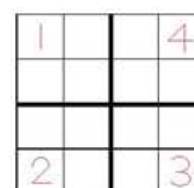


図4

1 または、2 B の場合は (図 5, 6)。この場合も一つも埋めることができないので不可です。

1	4		
2	3		

図 5

		3	4
		2	1

図 6

1 K の時は、上記以外ならば解が一つに定まる。つまり、1 B 1 K、2 B 1 K (図 9) は定まらず、3 B 1 K (図 7)、4 B 1 K (図 8) は定まります。

1	4	2	3
2	3	4	1
4	1	3	2
3	2	1	4

図 7

1	3	4	2
4	2	1	3
3	4	2	1
2	1	3	4

図 8

1			
	3		
		4	2

図 9

3 B の時は、途中まで埋めることはできますが解は定まらず複数解となるので不可です (図 10)。ただし今までの条件に当てはまっている 3 B 1 K はできます (図 11)。

1	2	3	4
4	3	2	1
3			2
2			3

図 10

1	3	4	2
4	2	3	1
2	4	1	3
3	1	2	4

図 11

4 B 2 K においては、基本的にはすべてできますが、4 つの数字を L 字型に配置したときのみ問題として成り立たなくなります。

例えば図 12 でいうと無理矢理進めることはできますが緑で囲まれた 4 が被ってしまっています。これは数独の定義の縦横一列に同じ数字が入ってはいけないに反するので成り立たないです。

1	4	2	3
2	3	4	1
4		3	4
3	4	1	2

図 12

最後の条件として、上記に書いてあるもの以外の 4 B はできます。

### 3. まとめ

今までの条件をまとめると、

- ① 3 つ以上一直線上 (縦・横) に並ばない。(ななめは 4 つの場合のみ無理である。)
- ② 4 K ではない。      ③ 2 B 以下に数字をしない。
- ③ 1 K はできる。      ⑤ 3 B にしない。
- ⑥ 4 B 2 K において L 字型に 3 つの数字をしない。
- ⑦ 4 B はできる。      このようになります。

B \ K	0	1	2	3	4
1	×	×	×	×	×
2	×	×	×	×	×
3	×	○	×	×	×
4	○	○	△	○	×

この条件は、数字が小さいものほど強くなります。たとえば、④で 1 K はできるとあります。⑤では 3 B にしないとあります。図 13 のような 3 B 1 K の場合、⑤だけみると 3 B なのでできませんが、それよりも数字の小さい④の条件があるので、この場合は解を定めることができます。

1			
	2	3	
			4

図 13

おまけ： 最初に与えられた数字が、1、1、2、3 のような、4 つの数字のうち 2 つが同じ数字のとき

- ① 2 B、3 B の時はできない
- ② 1 ~ 4 K のとき、同じ数字のものが対角の箱にあればできる
- ③ 0 K のときに、同じ数字が対角の箱になれば、できる (対角にあるときは、問題として不適である)

		K	
		0	1 ~ 4
同じ数字が対角の箱	ある	不適	○
	ない	○	×